

Рис. 3. Чертёж сопла:  
1 – сопло; 2 – шиберная заслонка; 3 – регулировочная гайка

За счет равномерности распределения воздушного потока решается задача повышения стойкости пода руднотермической печи и увеличения межремонтного периода.

## ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Куликов И.С., Кадникова Д.В., Швыдкий В.С.

ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»,  
г. Екатеринбург, Россия

Анализ закономерностей распространения излучения в излучающей и поглощающей среде, выполненный с использованием закона Бугера, приводит к интегро-дифференциальному уравнению переноса следующего типа

$$\frac{1}{\beta_v(s)} \frac{dI_v(s, \Omega)}{ds} + I_v(s, \Omega) = S_v(s, \Omega), \quad (1)$$

где спектральная функция источника  $S_v(s, \Omega)$  имеет вид

$$S_v(s, \Omega) \equiv (1 - \omega_v) I_{vb}(T) + \frac{1}{4\pi} \omega_v \int_{4\pi} P(\Omega' : \Omega) I_v(s, \Omega') d\Omega'. \quad (2)$$

Здесь  $\omega_v = \alpha_v(s)/\beta_v(s)$  – спектральное **альбедо**;  $\alpha_v(s)$  – коэффициент рассеяния;  $\beta_v(s)$  – коэффициент ослабления;  $I_v$  – спектральная интенсивность излучения;  $I_{vb}$  – то же по Планку для а.ч.т.;  $P(\Omega' : \Omega)$  – вероятность интенсивности излучения в данном направлении;  $\Omega' : \Omega = \cos\theta_0$ ,  $\theta_0$  – угол между падающим и рассеянным лучами. Последнее слагаемое правой части (2) характеризует **индикатрису** излучения.

Если при  $s = s_0$   $I_v(s, \Omega) = I_0$ , то формальное решение (1)

$$I_v(s, \Omega) = I_{v0} \exp\left[-\int_{s_0}^s \beta_v(s') ds'\right] + \int_{s_0}^s \beta_v(s') S_v(s', \Omega) \exp\left[-\int_{s_0}^s \beta_v(s'') ds''\right] ds'. \quad (3)$$

Математические трудности, возникающие при решении интегро-дифференциальных уравнений с реальной индикатрисой излучения, привели к появлению ряда приближённых методов в теории переноса излучения. В приближении *оптически тонкого* и *оптически толстого слоёв* (последнее называется также *диффузионным приближением*, или *приближением Росселанда*) используются упрощения, вытекающие из предельного значения толщины среды (других приближений в целях экономии места здесь не рассматриваем).

Приближённые методы полезны с той точки зрения, что они дают различные простые способы решения сложных задач переноса излучения.

**Приближение оптически тонкого слоя.** Приближение оптически тонкого слоя основано на предположении, что оптическая толщина среды  $\tau_0$  чрезвычайно мала (т.е.  $\tau_0 \ll 1$ ). В этом случае интегроэкспоненциальные функции  $E_n(z) = \int_0^1 \eta^{n-2} e^{-z/\eta} d\eta$ , где  $n$  – порядок

функции, и экспоненту можно представить в виде

$$E_2(\tau) = 1 - O(\tau); \quad E_3(\tau) = \frac{1}{2} - \tau + O(\tau^2); \quad e^{-\tau} = 1 - \tau + O(\tau^2). \quad (4)$$

Если подставить эти выражения в формальные решения, рассмотренные ранее, то можно получить относительно простые выражения для функции источника, интенсивностей излучения на граничных поверхностях, плотности потока результирующего излучения и других величин.

**Выражение для функции источника.** Формальное решение для спектральной функции источника в предположении изотропного излучения и осевой симметрии имеет вид

$$S_v(\tau) = (1 - \omega_v) I_{vb}[T(\tau)] + \frac{1}{2} \omega_v \left[ I_v^+(0) E_2(\tau) + I_v^-(\tau_0) E_2(\tau_0 - \tau) + \int_{\tau'=0}^{\tau_0} S_v(\tau') E_1(|\tau - \tau'|) d\tau' \right], \quad (5)$$

где  $T$  – абсолютная температура;  $\nu$  – частота;  $I_v^+(0)$  и  $I_v^-(\tau_0)$  – спектральные интенсивности излучения на границах плоского слоя (рис. 1).

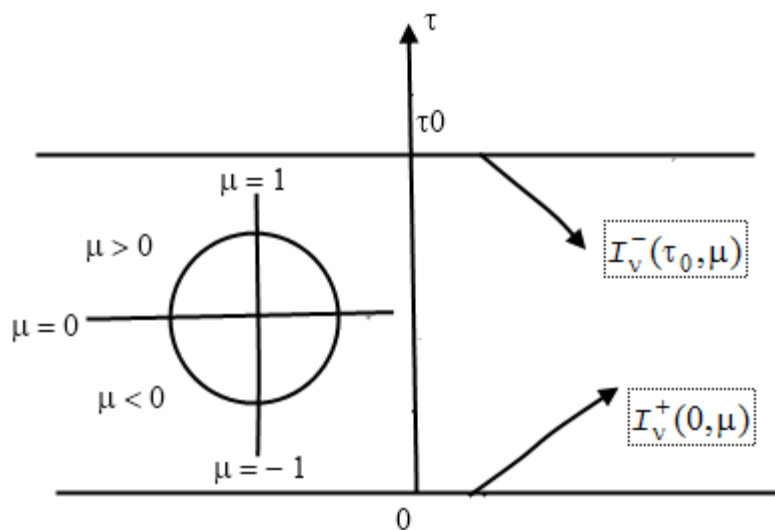


Рис. 1. Система координат при формальном решении уравнения переноса излучения в плоском слое

Для оптически тонкого слоя (т.е. при  $\tau_0 \ll 0$ ), подставляя в (5) приближённые выражения (4) и пренебрегая слагаемыми, имеющими порядок  $\tau_0$ , получаем

$$S_v(\tau) = (1 - \omega_v) I_{vb}[T(\tau)] + \frac{1}{2} \omega_v [I_v^+(0) + I_v^-(0)]. \quad (6)$$

Отсутствие здесь интегрального слагаемого говорит о том, что не происходит ослабления излучения, испускаемого самой средой. Физический смысл этого явления состоит в пренебрежимо малом влиянии самопоглощения излучения из-за очень малой оптической толщины среды.

**Выражения для интенсивности излучения на граничных поверхностях.** Рассмотрим уравнения для интенсивностей излучения на граничных поверхностях изотропно рассеивающего плоского слоя с диффузно отражающими границами

$$I_v^+(0) = \varepsilon_{1v} I_{vb}(T_1) + 2r_{1v}^d \left[ I_v^-(\tau_0) E_3(\tau_0) + \int_0^{\tau_0} \int_0^{\tau_0} S_v(\tau', -\mu') e^{-\tau'/\mu'} d\tau' d\mu' \right] \quad \text{при } \mu > 0, \quad (7a)$$

$$I_v^-(\tau_0) = \varepsilon_{2v} I_{vb}(T_2) + 2r_{2v}^d \left[ I_v^+(0) E_3(\tau_0) + \int_0^{\tau_0} \int_0^{\tau_0} S_v(\tau', \mu') e^{-(\tau_0 - \tau')/\mu'} d\tau' d\mu' \right] \quad \text{при } \mu < 0. \quad (7b)$$

Здесь  $\varepsilon_{1v}$  и  $\varepsilon_{2v}$  – спектральные полусферические степени черноты,  $r_{1v}^d$  и  $r_{2v}^d$  – спектральные полусферические диффузные отражательные способности граничных поверхностей.

Учитывая приближённые соотношения (4) и пренебрегая слагаемыми, имеющими порядок  $\tau_0$ , перепишем уравнения (7) в виде

$$I_v^+(0) = \varepsilon_{1v} I_{vb}(T_1) + r_{1v}^d I_v^-(\tau_0), \quad \mu > 0, \quad (8a)$$

$$I_v^-(\tau_0) = \varepsilon_{2v} I_{vb}(T_2) + r_{2v}^d I_v^+(0), \quad \mu < 0. \quad (8b)$$

Разрешив эту систему относительно интенсивностей излучения на граничных поверхностях, получаем

$$I_v^+(0) = \frac{\varepsilon_{1v} I_{vb}(T_1) + r_{1v} \varepsilon_{2v} I_{vb}(T_2)}{1 - r_{1v} r_{2v}}, \quad I_v^-(\tau_0) = \frac{\varepsilon_{2v} I_{vb}(T_2) + r_{2v} \varepsilon_{1v} I_{vb}(T_1)}{1 - r_{1v} r_{2v}}, \quad (9)$$

где для простоты опущен индекс  $d$  при  $r_{iv}$ .

**Выражение для плотности монохроматического потока результирующего излучения.** Формальное решение уравнения переноса излучения для случая изотропного рассеяния даёт следующее выражение для плотности потока монохроматического излучения

$$q_v^{\text{рез}}(\tau) = 2\pi \left[ I_v^+(0) E_3(\tau) + \int_0^{\tau} S_v(\tau') E_2(\tau - \tau') d\tau' \right] - 2\pi \left[ I_v^-(\tau) E_3(\tau_0 - \tau) + \int_{\tau}^{\tau_0} S_v(\tau') E_2(\tau' - \tau) d\tau' \right]. \quad (10)$$

При использовании (4) выражение (10) упрощается и принимает вид

$$q_v^{\text{рез}}(\tau) = 2\pi \left\{ I_v^+(0) \left( \frac{1}{2} - \tau \right) + \int_0^{\tau} S_v(\tau') d\tau' - I_v^-(\tau_0) \left[ \frac{1}{2} - (\tau_0 - \tau) \right] - \int_{\tau}^{\tau_0} S_v(\tau') d\tau' \right\}. \quad (11)$$

Здесь сохранены слагаемые порядка  $\tau_0$ , и поэтому это выражение имеет такой же порядок точности. Если слагаемыми порядка  $\tau_0$  пренебречь, то (11) упростится и примет вид

$$q_v^{\text{рез}} = \pi [I_v^+(0) - I_v^-(\tau_0)]. \quad (11a)$$

Если граничные поверхности непрозрачны и  $r_{1v} = 1 - \varepsilon_{1v}$ ,  $r_{2v} = 1 - \varepsilon_{2v}$ , то, подставляя выражения (8) в (11a), получаем

$$q_v^{\text{рез}} = \frac{\pi [I_{vb}(T_1) - I_{vb}(T_2)]}{\frac{1}{\varepsilon_{1v}} + \frac{1}{\varepsilon_{2v}} - 1}, \quad (11b)$$

т.е. обычное выражение, используемое для расчёта плотности монохроматического потока результирующего излучения между двумя непрозрачными пластинами, разделёнными прозрачной средой.

**Приближение оптически толстого слоя (приближение Росселанда, или диффузионное приближение).** Среда называется оптически толстой, если средняя длина свободного пробега фотона (т.е. величина, обратная коэффициенту ослабления) мала по сравнению с её характерным размером. Главное преимущество этого приближения состоит в том, что оно даёт очень простое выражение для плотности потока результирующего излучения. Ниже мы

дадим краткий вывод выражения для плотности монохроматического потока излучения в приближении оптически плотного слоя.

Запишем формальные решения уравнения переноса излучения для плотности монохроматического потока излучения  $q_v^{\text{рез}}(\tau)$  и спектральной функции источника  $S_v(\tau)$ :

$$q_v^{\text{рез}}(\tau) = 2\pi \left[ \int_0^1 I_v^+(0, \mu) e^{-\tau/\mu} \mu d\mu + \int_0^\tau S_v(\tau') E_2(\tau - \tau') d\tau' \right] -$$

$$- 2\pi \left[ \int_0^1 I_v^-(\tau_0, -\mu) e^{-(\tau_0 - \tau)/\mu} \mu d\mu + \int_\tau^{\tau_0} S_v(\tau') E_2(\tau' - \tau) d\tau' \right] \quad (12)$$

и

$$S_v(\tau) = (1 - \omega_v) I_{vb}[T(\tau)] + \frac{1}{2} \omega_v \left[ \int_0^1 I_v^+(0, \mu) e^{-\tau/\mu} d\mu + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 I_v^-(\tau_0, -\mu) e^{-(\tau_0 - \tau)/\mu} d\mu + \int_{\tau'=0}^{\tau_0} S_v(\tau') E_1(|\tau - \tau'|) d\tau' \right]. \quad (13)$$

Разложим функцию источника  $S_v(\tau)$  в ряд Тейлора в окрестности  $\tau$ :

$$S_v(\tau') = S_v(\tau) + (\tau' - \tau) \left. \frac{dS_v(\tau')}{d\tau'} \right|_\tau + \frac{1}{2!} (\tau' - \tau)^2 \left. \frac{d^2 S_v(\tau')}{d\tau'^2} \right|_\tau + \dots \quad (14)$$

Для оптически толстой среды  $\tau$ ,  $\tau_0$  и  $(\tau_0 - \tau)$  очень велики всюду, за исключением областей вблизи границ. Таким образом, рассматриваются области вдали от границ, где можно считать, что  $\tau$ ,  $\tau_0$  и  $(\tau_0 - \tau) \gg 1$ .

Для больших  $\tau$  интегроэкспоненциальная и экспоненциальная функции стремятся к нулю

$$e^{-\tau} \rightarrow 0, \quad E_n(\tau) \rightarrow 0, \quad \tau^n E_n(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{для} \quad \tau \rightarrow \infty, n = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Подставляя разложение (14) в (12) и (13), беря по частям интегралы с переменной интегрирования  $\tau'$  и упрощая полученные выражения с помощью (15), получаем

$$S_v(\tau) = I_{vb}[T(\tau)], \quad (16)$$

$$q_v^{\text{рез}}(\tau) = -\frac{4\pi}{3} \frac{dS_v(\tau)}{d\tau} = -\frac{4\pi}{3} \frac{dI_{vb}[T(\tau)]}{d\tau}. \quad (17)$$

Приведённые формулы справедливы для оптически толстой среды в области, удалённой (оптически) от границ. Выражение (17) называется приближением оптически толстого слоя для плотности монохроматического потока результирующего излучения  $q_v^{\text{рез}}(\tau)$ .

Теперь можно записать выражение для плотности интегрального потока результирующего излучения в приближении оптически толстого слоя:

$$q^{\text{рез}}(\tau) = -\frac{4\pi}{3} \int_{v=0}^{\infty} \frac{dI_{vb}[T(\tau)]}{d\tau} d\nu, \quad \text{или} \quad q^{\text{рез}}(y) = -\frac{4\pi}{3} \int_{v=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_v} \frac{dI_{vb}[T(y)]}{dy} d\nu. \quad (18)$$

Здесь  $\beta_v = \kappa_v + \sigma_v$  – спектральный коэффициент ослабления, складывающийся из спектрального коэффициента поглощения и спектрального коэффициента рассеяния.

Производная от  $I_{vb}[T(y)]$  по  $y$  равна

$$\frac{dI_{vb}(T)}{dy} = \frac{dI_{vb}(T)}{dI_b(T)} \frac{dI_b(T)}{dy}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18), получаем

$$q^{\text{рез}}(y) = -\frac{4\pi}{3} \frac{dI_b(T)}{dy} \int_{v=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_v} \frac{dI_{vb}(T)}{dI_b(T)} d\nu. \quad (20)$$

Определим **средний по Росселанду коэффициент ослабления**  $\beta_R$  как

$$\frac{1}{\beta_R} = \int_{v=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_v} \frac{dI_{vb}(T)}{dI_b(T)} dv. \quad (21)$$

Тогда выражение (20) примет вид

$$q^{\text{рез}}(y) = -\frac{4\pi}{3\beta_R} \frac{dI_b(T)}{dy} \quad \text{или} \quad q^{\text{рез}}(y) = -\frac{4\bar{\sigma}}{3\beta_R} \frac{d(n^2 T^4)}{dy}, \quad (22)$$

так как

$$I_b(T) = \frac{n^2 \bar{\sigma} T^4}{\pi}, \quad (23)$$

где  $n$  – показатель преломления среды, а  $\bar{\sigma}$  – коэффициент Стефана – Больцмана.

Для постоянного  $n$  выражение (22) может быть представлено в виде

$$q^{\text{рез}}(y) = -\lambda_r \frac{dT}{dy}, \quad \text{где } \lambda_r \equiv \frac{16n^2 \bar{\sigma} T^3}{3\beta_R}. \quad (24)$$

Коэффициент  $\lambda_r$  называют **коэффициентом лучистой теплопроводности** по аналогии с известным в теории теплопроводности коэффициентом теплопроводности. Выражение (24) имеет тот же вид, что и соответствующее выражение для плотности теплового потока за счёт теплопроводности; отсюда видно, что приближение оптически толстого слоя описывает процесс переноса излучения как диффузионный процесс.

Выражение (22) [или (24)] называют **приближением Росселанда** или **диффузионным приближением** для плотности потока излучения. Средний по Росселанду коэффициент ослабления  $\beta_R$ , определяемый выражением (21), может быть рассчитан с помощью функции излучения второго рода.

## ТЕХНИЧЕСКОЕ ПЕРЕВООРУЖЕНИЕ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПЕЧИ СТАНА 550 ОАО «ЧУСОВСКОЙ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИЙ ЗАВОД»

Лимонова Т.В., Казяев М.Д.

ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»,  
г. Екатеринбург, Россия

Чусовской металлургический завод является поставщиком рессорной стали для автомобильных заводов России. Производство осуществляется в прокатных цехах. В одном из них находится стан «550» перед которым установлена методическая толкательная печь. Конструкция печи представлена на рис. 1.

В печи осуществляется двусторонний нагрев металла, торцевая загрузка и боковая выдача нагретых заготовок, есть сплошная подина.

Печь нагревает заготовки сечением 110×110 до 255×124 мм, длиной от 2 до 3 м и массой до 580 кг. Заготовка в печи перемещается по двум водоохлаждаемым глиссажным трубам. Нагревательная печь оборудована 9-ю горелками: 4 – в торцевой стене сварочной зоны; 2 – в боковых стенах нижней части сварочной зоны; 3 горелки – в торцевой стене камеры нижнего подогрева.

Первоначально печь отапливалась природно-доменной смесью, а потом была переведена на природный газ практически без изменения конструкции.

Верхнее отопление только торцевое. Печь работает по двухзонному режиму. Выдержки на сплошном поду нет. Перегрев металла на последней стадии, это приводит к быстрому выходу свода печи из строя, что особенно проявилось при переходе на природный газ. Техническая характеристика существующей методической печи представлена в табл. 1. Тепловой баланс существующей методической печи представлен в табл. 2.